Emploi du temps des JNCF 2018

Lundi 22 janvier 2018

08:50	Accueil des participants et présentation des journées	
09:00	**Assia Mahboubi**	**Calcul formel et preuves formelles** (1)
10:30	Pause	
11:00	Fredrik Johansson	Fast and rigorous arbitrary-precision evaluation of Legendre polynomials and Gauss-Legendre quadrature nodes
11:30	Florent Bréhard	Approximations de Tchebychev certifiées de fonctions D-finies vectorielles
12:00	Silviu Filip	Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations
12:30	Déjeuner	
14:00	**Jean-Claude Yakoubsohn**	**Sur le calcul formel et numérique des singularités** (1)
15:30	Pause	
16:00	Magali Bardet	A New Approach for Solving the Permutation Code Equivalence Problem
16:30	Yairon Cid Ruiz	Regularity and Gröbner bases of the Rees algebra of edge ideals of bipartite graphs
17:00	Yacine Bouzidi	A Symbolic Approach for Solving Algebraic Riccati Equations
17:30	Seny Diatta	Projection of analytic surfaces
19:30	Dîner	

Mardi 23 janvier 2018

09:00	**Jean-Claude Yakoubsohn**	**Sur le calcul formel et numérique des singularités** (2)
10:30	Pause	
11:00	Fatmanur Yıldırım	Finite fibers of multi-graded dense rational maps on $\mathbb{P}^3$
11:30	Jouhayna Harmouch	Décomposition d'un tenseur symétrique de rang faible: Application à l'identification de modèle statistique
12:00	Ahmed Blidia	Continuité géométrique : Calculs sur des éléments polynomiaux par morceaux
12:30	Déjeuner	
14:00	**Assia Mahboubi**	**Calcul formel et preuves formelles** (2)
15:30	Pause	
16:00	François Ollivier	Singularités des diffiétés algébriques
16:30	Mohamed Housseine Abdou	Problèmes elliptiques fortement non linéaires dans les espaces de Sobolev à exposant variable d'ordre infini
17:00	Jürgen Gerhard	Advances in Symbolic Computation in Maple
17:30	Jürgen Gerhard	Atelier – Discussions Maple
19:30	Dîner	

Mercredi 24 janvier 2018

09:00	**Daniel Robertz**	**Méthodes formelles pour les équations aux dérivées partielles** (1)
10:30	Pause	
11:00	Dan Roche	Correcting errors in a matrix inverse
11:30	Adrien Poteaux	A dichotomic Newton-Puiseux algorithm using dynamic evaluation
12:00	Robin Larrieu	Une implémentation de la multiplication rapide des polynômes binaires
12:30	Déjeuner	
19:30	Dîner	

Jeudi 25 janvier 2018

09:00	**Éric Gourgoulhon**	**Calcul tensoriel formel sur les variétés différentielles** (1)
10:30	Pause	
11:00	Xavier Caruso	Variations autour d'un théorème de Christol
11:30	Henri Lombardi	A pseudo-matrix approach to Prüfer domains
12:00	Jeremy Marrez	Étude et implantation d'une méthode algébrique pour résoudre des systèmes à coefficients flous
12:30	Déjeuner	
14:00	**Daniel Robertz**	**Méthodes formelles pour les équations aux dérivées partielles** (2)
15:30	Pause	
16:00	Romain Lebreton	Conversions simultanées entre représentation classique et modulaire à l'aide d'algèbre linéaire
16:30	Sudarshan Shinde	Finding ECM-friendly curves – A Galois approach
17:00	Simon Abelard	Comptage de points de courbes hyperelliptiques en genre 3 et au-delà, théorie et pratique
17:30	Pause	
17:45	**Table ronde**	
19:30	**Dîner social**	

Vendredi 26 janvier 2018

09:00	**Éric Gourgoulhon**	**Calcul tensoriel formel sur les variétés différentielles** (2)
10:30	Pause	
11:00	Jordy Palafox	Autour de l'arborification et de ses applications
11:30	Gérard Duchamp	Équations d'évolution et calcul différentiel non commutatifs
12:00	Hoang Ngoc Minh	A propos d'un groupe d'associateurs
12:30	Déjeuner	

Fast and rigorous arbitrary-precision evaluation of Legendre polynomials and Gauss-Legendre quadrature nodes

Fredrik Johansson* Marc Mezzarobba†

Gauss-Legendre quadrature requires a nearly minimal number of evaluation points to achieve a given accuracy for numerical integration of functions that are well-approximated by polynomials. However, other quadrature rules (such as the Clenshaw-Curtis and double exponential formulas) have often been favored in high-precision computations due to the cost of generating the quadrature nodes, even in cases where those rules require more evaluation points.

We describe an efficient strategy for rigorous arbitrary-precision evaluation of Legendre polynomials on the unit interval and its application in the generation of Gauss-Legendre quadrature rules.

Our focus is on making the evaluation practical for a wide range of realistic parameters, corresponding to the requirements of numerical integration to an accuracy of about 100 to 100 000 bits. Our evaluation algorithm combines the summation by rectangular splitting of several types of expansions in terms of hypergeometric series with a fixed-point implementation of Bonnet's three-term recurrence relation. We then compute rigorous enclosures of the Gauss-Legendre nodes and weights using the interval Newton method. We provide rigorous error bounds for all steps of the algorithm.

The practicality of the approach is validated by an implementation in the Arb library. Our implementation achieves an order-of-magnitude speedup over previous code for computing Gauss-Legendre nodes with simultaneous high degree and precision, making Gauss-Legendre quadrature viable even at very high precision.

References

[1] D. H. Bailey and J. M. Borwein. High-precision numerical integration: Progress and challenges. *Journal of Symbolic Computation*, 46(7):741–754, 2011.

[2] I. Bogaert. Iteration-free computation of Gauss–Legendre quadrature nodes and weights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(3):A1008–A1026, 2014.

[3] L. Fousse. Accurate multiple-precision Gauss–Legendre quadrature. In *18th IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, ARITH'07, pages 150–160. IEEE, 2007.

*Inria Bordeaux, équipe LFANT, `fredrik.johansson@gmail.com`

†CNRS, LIP6, équipe Pequan, `marc@mezzarobba.net`

[4] F. Johansson. Arb: efficient arbitrary-precision midpoint-radius interval arithmetic. *IEEE Transactions on Computers*, 66:1281–1292, 2017.

[5] K. Petras. On the computation of the Gauss–Legendre quadrature formula with a given precision. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 112(1):253–267, 1999.

[6] L. N. Trefethen. Is Gauss quadrature better than Clenshaw–Curtis? *SIAM review*, 50(1):67–87, 2008.

[7] J. Wimp. *Computation with Recurrence Relations*. Pitman, Boston, 1984.

Continuité géométrique : Calculs sur des éléments polynomiaux par morceaux

Ahmed Blidia Bernard Mourrain

La continuité géométrique est un concept très utilisé dans les méthodes de CAD (Computer Aided design). Ce concept est abordé de différentes manières, nous proposons une étude algébrique de l'équation qui définissent cette continuité.

Deux surfaces $f_1, f_2 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ admettent une jonction G^k le long d'un segment E avec $k \in \mathbb{N}$, si elles ont le même développement de Taylor sur E après un changement de coordonées ϕ, autrement dit $T^{(k)}(f_1) = T^{(k)}(f_2 \circ \phi)$. La réunion des images de telles paramétrisations est une surface lisse.

Dans ce travail [1], nous étudions l'espace $\mathcal{S}(\mathcal{M})$ des splines à continuité G^1 associés à un maillage arbitraire $\mathcal{M}$, nous considérons des éléments polynomiaux par morceaux.

Certains modèles déja construits ont un degré et nombre de noeuds plus élevés. La plupart de ces travaux utilisent des résolutions de systèmes linéaires. Notre objectif est d'exploiter des structures plus sophistiquées, comme les modules, pour obtenir une analyse plus précise de ces espaces de fonctions. Pour cela nous présentons une étude de l'espace de syzygy sur les fonctions univariées polynomiales par morceaux. Les buts sont les suivants :

- Construire des splines avec une bonne répartitions des degrés de liberté.
- Donner des conditions sur les données de recollement pour ne pas générer de singularité.

Références

[1] Ahmed Blidia, Bernard Mourrain, and Nelly Villamizar, *G1-smooth splines on quad meshes with 4-split macro-patch elements*, Computer Aided Geometric Design **52** (2017), 106 – 125, Geometric Modeling and Processing 2017.

Singularités des diffiétés algébriques

François Ollivier (CNRS)
LIX UMR 7161, École polytechnique

L'origine de ce travail est l'étude des singularités des systèmes différentiels plat, entreprise avec Jeremy Kaminski et Jean Lévine [2]. Par exemple, un modèle simple de voiture est plat : $y' - \mathrm{tg}\theta x' = 0 \quad (1)$. On peut paramétrer les trajectoires par les coordonnées d'un point de l'essieu arrière, (x, y), ce qui donne : $\theta = \mathrm{arctg}(y'/x')$, pourvu que $x' \neq 0$. On peut montrer qu'un paramétrage plat existe en tout point où $(x', y', \theta') \neq (0, 0, 0)$. Ces points sont des *singularités au sens des systèmes plats*. Ce sont néanmoins des points lisses de la *diffiété*, c'est-à-dire de l'objet géométrique défini par le système (1).

En effet, les diffiétés définies dans les ouvrages de Vinogradov [5] ou Zharinov [6] sont des variétés lisses, munies d'un champs de vecteur. Mais si on prend des diffiétés définies, par exemple, comme sous-espace de l'espace des jets par des équations différentielles algébriques, des points singuliers peuvent apparaître. La littérature sur le sujet est réduite. On trouve un article de Johnson [1], dans le formalisme de l'algèbre différentielle de Ritt [4].

Johnson propose d'abord une définition intuitive informelle utilisant les ensembles caractéristiques, avant de proposer une notion abstraite. On tente de revenir aux ensembles caractéristiques pour parvenir à une caractérisation effective des points singuliers. On reprend essentiellement la définition informelle de Johnson.

Définition. — Un point ξ d'une diffiété définie par un idéal différentiel premier $\mathcal{P}$, associé à un idéal (non différentiel) maximal $\mathfrak{m}$ est *régulier* s'il existe des fonctions coordonnées y_j, définies en ξ et telles que $\mathcal{P}$ admette, dans ces coordonnées, pour un ordre admissible convenable, un ensemble caractéristique $\mathcal{A}$ tel que $\forall A \in \mathcal{A}\ S_A(\xi) \neq 0$. (Rappelons que S_A est la dérivée partielle de A par rapport à sa dérivée dominante.)

C'est-à-dire que les dérivées dominantes peuvent localement s'exprimer comme fonction des dérivées inférieures. On montre que l'on retrouve une proposition prouvée par Johnson dans son formalisme.

Proposition. — Si ξ, défini par $\mathfrak{m}$, est régulier, alors $\bigcup_{r \in \mathrm{N}} \mathfrak{m}^r = (0)$.

Un exemple, emprunté à Johnson [1, p. 216], permet d'exhiber un point singulier.

Exemple. — On considère la diffiété algébrique V définie par l'idéal différentiel dont un ensemble caractéristique est $yy'' - y'$. Le terme de degré minimal est y', qui n'est pas d'ordre nul, donc $[y]$ n'est pas une composante isolée. On montre que pour tout $r \in \mathrm{N}\ y' \in [y]^r$. En effet la propriété est vraie pour $r = 0, 1$. Si elle est vraie pour r, alors $y'' \in [y]^r$ et $y' = yy'' \in [y]^{r+1}$. Ceci montre que le point correspondant à l'idéal $\mathfrak{m} := [t, y]$ est singulier puisque $\bigcup_{r \in \mathrm{N}} \mathfrak{m}^r \neq (0)$.

Désingulariser une variété algébrique consiste à rechercher une variété lisse dont elle soit la projection (ou l'image par un morphisme fini), à laquelle elle soit birationnellement équivalente. On voit que V ne peut être la projection d'une variété lisse W, car alors l'intersection des puissances $\mathfrak{m}^r$ serait la projection des puissance d'un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(W)$, donc (0). Les tentatives de désingularisation par des moyens classiques semblent donc compromises.

On donnera un aperçu d'une caractérisation de ces singularités au moyens des différentielles de Kähler.

Références

[1] Johnson (Joseph), « A notion of regularity for differential local algebras », in *Contributions to algebra*, 211–232, Academic Press, New York, 1977.

[2] Kaminski (Yirmeyahu J.), Lévine (Jean) et Ollivier (François), *Intrinsic and Apparent Singularities in Differentially Flat Systems, and Application to Global Motion Planning*, 2017.

[3] Kolchin (Ellis Robert), *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.

[4] Ritt, (Joseph Fels), 1950. *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, A.M.S., New-York.

[5] Krasil'shchik (Iosif S.), Lychagin (Valentin V.) et Vinogradov (Alexandre M.), *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.

[6] Zharinov (Viktor Viktorovich), *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.

Problèmes Elliptiques fortement non linéaires dans les Espaces de Sobolev à exposant variable d'ordre infini

M. H. Abdou[1,a], A. Benkirane[1] and S. El Manouni[2]

[1] Département de Mathématiques et Informatique Faculté des sciences Dhar-Mahraz, B.P. 1796 Atlas-Fès, Maroc

[a] Département MPC, Faculté des sciences et techniques, Université des comores, B.P 2585 Rue de la Corniche Moroni Comores

[2] Al-Imam University, Faculty of Sciences, Department of Mathematics P. O. Box 90950, Riyadh 11623, Saudi Arabia.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'existence de solutions pour les problèmes Elliptiques fortement non-linéaires avec des conditions de croissance non-standard dans le cadre des Espaces de Sobolev d'ordre infini anisotropiques avec des exposants variables notés $W_0^{\infty}(a_\alpha, p_\alpha(x))(\Omega)$.
Nous allons tout d'abord traiter le cas fini, c'est à dire dans le cadre des Espaces de Sobolev à exposants variables anisotropiques d'ordre fini $W_0^{m,\vec{p}(x)}(\Omega)$ et ensuite montrer l'existence de solutions dans le cas infini.

Mots clés. espaces de Sobolev anisotropique à exposants variables, équations elliptiques fortement non-linéaires d'ordre infini, condition de monotonie, Condition de signe.

Références

[1] Adams,R., *Sobolev Spaces.* New York : Academic Press 1975.

[2] A. Benkirane M. Chrif and S. El Manouni, *Existence Results for Strongly Nonlinear Equations of Infinite Order*, Z. Anal. Anwend. (J. Anal. Appl.) 26, pp 303- 312 (2007)

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionelle. Théorie, Méthodes et Applcations,* Masson, Paris, 1992.

[4] M. Chrif and S. El Manouni, *On a strongly anisotropic equation with L1-data*, Appl. Anal. 87(7), pp 865-871 (2008)

[5] M. Chrif and S. El Manouni, *Anisotropic equations in weighted Sobolev spaces of higher order*, Ricerche mat. DOI 10.1007/s11587-009-0045-1 (2009).

[6] Ju. A. Dubinskii, *Sobolev Spaces of Infinite Order and Differential Equations*, Teubner-Texte Math. Band 87. Leipzig : Teubner, 1986.

[7] Ju. A. Dubinskii, *Sobolev spaces for infinite order and the behavior of solutions of some boundary value problems with unbounded increase of the order of the equation*, Math. USSR-Sb. 27 (1975)(2), pp. 143-162.

[8] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J. 41 (1991) 592-618.

[9] J. L. Lions *Quelque Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires.* Paris : Dunod ; Gauthier-Villars 1969.

[10] X.L. Fan, D. Zhao, *On the generalized Orlicz-Sobolev space* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Gansu Educ. College 12 (1) (1998) 1-6.

[11] D. Zhao, W.J. Qiang, X.L. Fan, *On generalized Orlicz spaces* $L^{p(x)}$, J. Gansu Sci. 9 (2) (1996) 1-7.

Advances in Symbolic Computation in Maple

Jürgen Gerhard*

We will summarize the advances in symbolic computation in Maple that were made over the past years, including polynomial arithmetic, real root isolation and polynomial system solving, series and limit computations, symbolic integration and symbolic summation, and differential equations.

*Senior Director of Research, Maplesoft

A pseudo-matrix approach to Prüfer domains

Gema M. Díaz-Toca* Henri Lombardi†

Abstract

In this extended abstract, we present the tools in order to construct an algorithm for computing the Hermite normal form of pseudo-matrices over Prüfer domains. This algorithm allows us to provide constructive proofs of the main theoretical results on finitely presented modules over Prüfer domains and to discuss the resolution of linear systems. We generalize the methodology developed by Henri Cohen for Dedekind domains in [Cohen, Chapter 1]. Finally, we present some results for Prüfer domains of dimension one. A full paper is found on `http://arxiv.org/abs/1508.00345`.

Introduction

The algorithmic solution of linear systems over fields or over PIDs is classical and it is equivalent to transforming the system via elementary manipulations (and Bezout manipulations for PIDs), in order to obtain a convenient reduced form (Hermite normal form or Smith normal form).

We use here a generalization of this kind of process for arbitrary Prüfer domains.

We adapt for an arbitrary Prüfer domain the generalized matrix computations given by Henri Cohen [Cohen, Chapter 1] for the algorithmics in rings of number fields (number rings).

We obtain a system of generalized matrix computations and as consequences the main "abstract" theorems for Prüfer domains. The generalization consists in replacing when necessary matrices over usual bases by matrices over decompositions of the modules as direct sums of rank one projective modules. These new matrices are called pseudo-matrices.

From a Computer Algebra viewpoint, computing with pseudo-matrices allows us to treat some examples inaccessible for usual methods: since our true computational tool is the inversion of finitely generated ideals, it is possible to work with number rings whose discriminant has no known complete factorization.

For Dedekind domains, and more generally for dimension one Prüfer domains, we obtain more precise results, similar to Smith reduction of usual matrices in PIDs.

General references for the constructive theory of Prüfer domains are found in [ACMC, CACM, Modules]. Many useful constructive proofs are also found in [MRR].

*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Murcia, 30100 Murcia, Spain. gemadiaz@um.es

†Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon, France henri.lombardi@univ-fcomte.fr

1 Basic facts

1.1 Definitions

A ring $\mathbf{A}$ is ***zero-dimensional*** when

$$\forall a \in \mathbf{A},\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbf{A},\ x^n(1-ax) = 0.$$

An integral domain $\mathbf{A}$ is ***of (Krull) dimension*** $\leqslant 1$ if for all $b \neq 0$ in $\mathbf{A}$, the quotient ring $\mathbf{A}/\langle b \rangle$ est zero-dimensional. E.g. number rings have dimension 1 because their quotients are finite, and consequently zero-dimensional.

Over an arbitrary ring $\mathbf{A}$ a finitely generated ideal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ is ***locally principal*** if there exists $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{A}$ such that $\sum_{i \in [\![1..n]\!]} s_i = 1$ and $s_i\mathfrak{a} \subseteq \langle a_i \rangle$ for each s_i.

A ring $\mathbf{A}$ is ***arithmetic*** if all finitely generated ideals are locally principal.

A finitely generated ideal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ is ***invertible*** if there exists a regular element c and an finitely generated ideal $\mathfrak{b}$ such that $\mathfrak{ab} = \langle c \rangle$. Il other words, $\mathfrak{a}$ is locally principal an contains a regular element.

A ***Prüfer domain*** is an integral arithmetic ring. In other words, it is an integral domain whose all nonzero finitely generated ideal are invertible.

The ***determinantal ideal of order*** k of a matrix M is the ideal $\mathfrak{D}_k(M)$ generated by the minors of order k of M.

The ***Fitting ideal of order*** k of a finitely presented module P, coker of a matrix $M \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{A})$ is defined by $\mathfrak{F}_k(P) := \mathfrak{D}_{n-k}(M)$.

1.2 Computations with finitely generated ideals in a Prüfer domain

We work with an explicit Prüfer domain $\mathbf{Z}$. This means that for an arbitrary finitely generated ideal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ we have an algorithm that computes $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{Z}$ such that $\sum_i s_i = 1$ and $s_i\mathfrak{a} \subseteq \langle a_i \rangle$ for each s_i. E.g. number rings are explicit Prüfer domains. We assume also that $\mathbf{Z}$ has a divisbility test, giving an x s.t. $ax = b$ when the test gives the answer "Yes" to the question "does a divise b?".

From these basic algorithms the following computations are shown to be easy. Note that by "computing an ideal", we mean to compute a generator set and a list $(s_1, \ldots, s_n)$ as in the previous explanation.

- For $\mathfrak{a}$ finitely generated, compute an ideal $\mathfrak{b}$ s.t. $\mathfrak{ab}$ is principal.
- For $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ finitely generated, compute s, t s.t. $s + t = 1$, $s\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ and $t\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.
- For $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ finitely generated, compute $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ and $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.
- For $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ finitely generated, test if $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.

The following computations are more tricky. We assume that $\mathbf{Z}$ is moreover explicitly of dimension 1.

- For $\mathfrak{a}$ finitely generated and a nonzero in $\mathfrak{a}$, compute $b \in \mathfrak{a}$ s.t. $\mathfrak{a} = \langle a, b \rangle$.
- For $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ finitely generated, compute an isomorphism between the modules $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ and $\mathbf{Z} \oplus \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

2 Pseudo-bases and pseudo-matrices

We note $\mathbf{K}$ the quotient field of $\mathbf{Z}$ and $\mathrm{Gfr}(\mathbf{Z})$ the (multiplicative) group of ***fractional ideals*** of $\mathbf{K}$. Such a fractional ideal is a sub-$\mathbf{Z}$-module of $\mathbf{K}$ equal to $\frac{\mathfrak{a}}{c}$ for a (usual) finitely generated ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{Z}$ and c nonzero in $\mathbf{Z}$. A $\mathbf{Z}$-module E which is finitely generated and without torsion can be viewed as a sub-$\mathbf{Z}$-module of the $\mathbf{K}$-vector space $E' = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{Z}} E$.

A finitely generated projective $\mathbf{Z}$-module E can always be given as a direct sum $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ with isomorphisms $E_i \simeq \mathfrak{e}_i \in \mathrm{Gfr}(\mathbf{A})$: $\mathfrak{e}_i \ni x \mapsto x e_i$ (where $e_i \in E'$). A ***pseudo-basis*** of E is by definition an r-tuple

$$\boxed{\big((e_1, \mathfrak{e}_1), \dots, (e_r, \mathfrak{e}_r)\big)} \text{ s.t. } E = \mathfrak{e}_1 e_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_r e_r,$$

Note that $(e_1, \dots, e_r)$ is a basis of the vector space E'.

Let $\varphi : E \to H$ a linear map between projective modules with pseudo-bases

$$\mathscr{E} = \big((e_1, \mathfrak{e}_1), \dots, (e_m, \mathfrak{e}_m)\big) \text{ and } \mathscr{H} = \big((h_1, \mathfrak{h}_1), \dots, (h_n, \mathfrak{h}_n)\big).$$

Extending the scalars to $\mathbf{K}$ we get a linear map $\varphi' : E' \to H'$ with a matrix $\underline{A}$ over the $\mathbf{K}$-bases $(e_1, \dots, e_m)$ and $(h_1, \dots, h_n)$.

- We call ***matrix of φ over pseudo-bases $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$*** the data

  $$A = (\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n; \mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_m; \underline{A}) = (\underline{\mathfrak{h}}; \underline{\mathfrak{e}}; \underline{A}), \text{ where } \underline{A} = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K}).$$

  We have the inclusions $a_{ij}\mathfrak{e}_j \subseteq \mathfrak{h}_i$. We note $\boxed{A = \mathscr{M}_{\mathcal{E},\mathcal{H}}(\varphi)}$.

intuitive visualization: $$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_2 \\ \mathfrak{h}_3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \quad a_{ij}\mathfrak{e}_j \subseteq \mathfrak{h}_i.$$

- We call ***pseudo-matrix*** any data $(\underline{\mathfrak{h}}; \underline{\mathfrak{e}}; \underline{A})$ of this kind, i.e. with inclusions $a_{ij}\mathfrak{e}_j \subseteq \mathfrak{h}_i$. It can be viewed as the matrix of a $\mathbf{Z}$-linear map between sub-$\mathbf{Z}$-modules of $\mathbf{K}^n$ and $\mathbf{K}^m$.
- For fixed lists $\underline{\mathfrak{e}}$ et $\underline{\mathfrak{h}}$, the corresponding pseudo-matrices define a $\mathbf{Z}$-module $\boxed{\mathbb{M}_{\underline{\mathfrak{h}};\underline{\mathfrak{e}}}(\mathbf{A})}$ (isomorphic to the $\mathbf{Z}$-module of $\mathbf{Z}$-linear maps from E to H). The product of pseudo-matrices of convenient formats is defined in the natural way and corresponds to the composition of linear maps.

- For a square pseudo-matrix $A = (\underline{\mathfrak{h}}; \underline{\mathfrak{e}}; \underline{A})$ we define its ***determinant (ideal)*** as being
$$\boxed{\mathbf{Z} \supseteq \mathfrak{det}(A) := \det(\underline{A})\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{h}^{-1}},\ \text{where } \mathfrak{e} = \prod\nolimits_j \mathfrak{e}_j \text{ and } \mathfrak{h} = \prod\nolimits_i \mathfrak{h}_i.$$
A square pseudo-matrix A is invertible if and only if $\mathfrak{det}(A) = \mathbf{Z}$. For square pseudo-matrices A and B with convenient formats we have $\mathfrak{det}(AB) = \mathfrak{det}(A)\,\mathfrak{det}(B)$.

- Let $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_r] \subseteq [\![1..n]\!]$ et $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r] \subseteq [\![1..m]\!]$ subsequences in increasing order. We note $A_{\beta,\alpha}$ the pseudo-matrix extracted on the rows β and columns α.
$$A_{\beta,\alpha} = (\mathfrak{h}_{\beta_1}, \ldots, \mathfrak{h}_{\beta_r}; \mathfrak{e}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{e}_{\alpha_r}, \underline{A}_{\beta,\alpha}).$$
The ideal
$$\mathfrak{m}_{\beta,\alpha}(A) := \mathfrak{det}(A_{\beta,\alpha}) = \det(\underline{A}_{\beta,\alpha})(\prod\nolimits_{i=0}^{r} \mathfrak{e}_{\alpha_i})(\prod\nolimits_{j=0}^{r} \mathfrak{h}_{\beta_j})^{-1}$$
is called ***the minor (ideal) of order r of A extracted on rows β and columns α***.

- For an arbitrary pseudo-matrix and $r \leqslant \inf(m,n)$ the ***determinantal ideal of order r of A***, noted $\mathfrak{D}_r(A)$, is the sum of minors of order r of A.
The pseudo-matrix A represents a surjective linear map if and only if $\mathfrak{D}_n(A) = \mathbf{Z}$.

- Let $s \in \mathbf{Z}^*$ s.t. the modules $E[1/s]$ and $H[1/s]$ are free over $\mathbf{Z}[1/s]$.
Let $\varphi_s : E[1/s] \to H[1/s]$ the extension of φ by $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[1/s]$.
Then for each r we get $\mathfrak{D}_r(\varphi)\mathbf{Z}[1/s] = \mathfrak{D}_r(\varphi_s)$ (usual determinantal ideals).

- Let $(s_1, \ldots, s_n)$ be comaximal in $\mathbf{Z}$. A linear system $AX = B$ (with pseudo-matrices A, B, X) admits a solution in $\mathbf{Z}$ if and only if it admits a solution in each $\mathbf{Z}[1/s_i]$.

3 Computations with pseudo-matrices

Let $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ be two finitely generated ideals of $\mathbf{Z}$ and M be a module with pseudo-basis $\mathcal{E} = \big((e_1, \mathfrak{a}), (e_2, \mathfrak{b})\big)$. If $s + t = 1$, $s\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ and $t\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, another pseudo-basis of M is $\mathcal{H} = \big((f_1, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}), (f_2, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\big)$ where $f_1 = te_1 + se_2$ et $f_2 = -e_1 + e_2$. We get the following "Bezout pseudo-matrix " of change of pseudo-bases from $\mathcal{E}$ to $\mathcal{H}$.

$$B = \mathscr{M}_{\mathcal{H},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_M) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathfrak{a}+\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{array} & \begin{bmatrix} t & -1 \\ s & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

with inverse

$$\mathscr{M}_{\mathcal{E},\mathcal{H}}(\mathrm{Id}_M) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -s & t \end{bmatrix} \end{array}.$$

The Bezout pseudo-matrices and the analogues of Gauss pivoting matrices allow us to compute the reduction of pseudo-matrices to convenient "normal forms", analogous to HNF (Hermite normal form) for Prüfer domains and to SNF (Smith normal form) for Prüfer domains of dimension 1.

For dealing with pseudo-matrices over Prüfer domains of dimension 1 we use an algorithm in some zero-dimensional quotient rings: *a zero-dimensional arithmetic ring is a principal ideal ring and a matrix over it can be reduced to a Smith normal form by elementary row and column manipulations.*

Two kinds of easy consequences of these reductions of pseudo-matrices:

- The general discussion of linear systems over Prüfer domains (coefficients and unknowns in $\mathbf{Z}$)
- Theoretical results on the structure of finitely presented modules, finitely generated projective modules and linear maps between these modules: a finitely generated sub-$\mathbf{Z}$-module of $\mathbf{K}^n$ is finitely generated projective, a finitely generated projective module is a direct sum of rank one projective submodules, the kernel of a linear map between finitely generated projective modules is a direct summand, and so on...

References

[ACMC] Lombardi H. & Quitté C. *Algèbre Commutative. Méthodes constructives.* Calvage&Mounet (2011).

[CACM] Translated, revised and extended english version of [ACMC]. Springer (2015).

[Cohen] Cohen H. *Advanced topics in computational number theory.* Graduate texts in mathematics 193. Springer-Verlag (1999).

[Modules] Díaz-Toca G.-M., Lombardi H. & Quitté C. *Modules sur les anneaux commutatifs.* Calvage&Mounet (2014).

[MRR] Mines R., Richman F. & Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988).

Autour de l'arborification et de ses applications

Jordy Palafox

Les structures arborescentes et séries formelles sur des arbres/forêts apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques, en analyse numérique dès les travaux de Butcher sur les shémas de Runge-Kutta (voir [2]), en systèmes dynamiques pour la linéarisation de champs de vecteurs analytiques (voir [5]) ou encore en calcul stochastique avec les équations différentielles conduites par un signal rugueux (voir [6]) ou les équations aux dérivées partielles stochastiques (voir [1]).

Dans les années 70, Jean Ecalle introduit pour des problèmes de normalisation des champs de vecteurs ou difféomorphismes analytiques locaux, le formalisme des moules et la méthode d'arborification (voir [4], [3]). Le formalisme des moules permet d'extraire des coefficients universels des séries formelles normalisantes et la technique d'arborifcation permet de démontrer leur convergence en présence de petits diviseurs.

Dans cet exposé, nous donnerons une présentation de la méthode d'arborification et de ses diverses propriétés. Nous l'illustrerons dans un premier temps sur le théorème de Bruyno de linéarisation analytique des champs de vecteurs vérifiant une condition arithmétique de Bruyno. Nous montrerons aussi comment cette méthode permet de retrouver les résultats de Butcher en analyse numérique et son rôle dans l'étude des équations différentielles stochastiques.

Références

[1] Y.Bruned, M.Hairer, L.Zambotti, *Algebraic renormalization of regularity structures*, Arxiv préprint : `https://arxiv.org/pdf/1610.08468v2.pdf`, 2017.

[2] J.C.Butcher, *Numerical methods for Ordinary Differential Equations*, Third Edition, Wiley, 2016.

[3] J.Cresson, D.Manchon, J.Palafox, *Arborifcation, invariance and convergence of normalizing series*, 27p., préprint, 2017.

[4] J.Ecalle, *Singularités non abordables par la géométrie*, Ann.Inst.Fourier, 42(1-2),73-164, 1992.

[5] J.Ecalle et B.Vallet, *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*, Math..Z., 229 :249-318, 1998.

[6] M.Gubinelli, *Ramification of rough paths*, Journal of Differential Equations 248, no.4,693-721, 2010.